

## ETUDE DU TRANSFERT DE MASSE SUR UN CYLINDRE OSCILLANT SINUSOÏDALEMENT DANS UN FLUIDE NEWTONIEN AU REPOS

P. DUMARGUE et D. KALACHE

Laboratoire de Physique et Mécanique des Fluides de l'U.E.R. des Sciences Fondamentales et  
Appliquées de l'Université de Poitiers, Equipe No. III du Laboratoire No. 191 associé au C.N.R.S.,  
Poitiers, France

(reçu le 20 janvier 1976 et le manuscrit révisé le 15 septembre 1976)

**Résumé**—L'étude théorique qui est présentée a pour but de définir les lois du transfert de masse sur des électrodes disposées sur un obstacle oscillant sinusoidalement dans un fluide newtonien au repos. L'obstacle choisi est un cylindre oscillant normalement à sa génératrice. L'écoulement est supposé laminaire, ses oscillations sont de faible amplitude relativement au rayon du cylindre, et le nombre de Reynolds est grand. L'étude théorique comprend deux parties, la première concerne un cylindre partiellement actif, la seconde le transfert sur une microélectrode placée sur un cylindre inerte. Des résultats expérimentaux sont présentés dans le cas d'un transfert de masse local sur micro-électrode.

### NOTATIONS

<p><math>a</math>, amplitude de vibration du cylindre;</p> <p><math>a_k, a_k^*</math>, fonctions de <math>x_+</math>;</p> <p><math>b</math>, constante;</p> <p><math>b_k, b_k^*</math>, fonctions de <math>x_+</math>;</p> <p><math>A_k</math>, <math>(a_k^2 + b_k^2)^{1/2}</math>;</p> <p><math>B_x(a, b)</math>, fonction bêta incomplète;</p> <p><math>B(a, b)</math>, fonction bêta;</p> <p><math>c^*</math>, concentration de référence;</p> <p><math>c</math>, concentration [moles/cm<sup>3</sup>];</p> <p><math>c_+</math>, <math>= \frac{c}{c^*}</math>, concentration adimensionnelle;</p> <p><math>\tilde{c}_+, \tilde{c}_+</math>, parties stationnaire et instationnaire de la concentration;</p> <p><math>\tilde{c}_+^*</math>, <math>= \varepsilon_1^{-2} \tilde{c}_+</math>;</p> <p><math>c_k, c_{k,1}</math>, fonctions intermédiaires;</p> <p><math>d</math>, diamètre de l'électrode circulaire;</p> <p><math>D</math>, coefficient de diffusion;</p> <p><math>\mathcal{F}</math>, nombre de Faraday;</p> <p><math>I</math>, intensité électrique;</p> <p><math>I_1, I_2</math>, intégrales;</p> <p><math>\bar{J}</math>, flux local stationnaire de matière;</p> <p><math>\bar{J}</math>, flux moyen stationnaire de matière;</p> <p><math>\bar{j}</math>, flux local, instantané, instationnaire de matière;</p> <p><math>\langle \bar{j} \rangle</math>, valeur efficace du flux local;</p> <p><math>j</math>, nombre complexe;</p> <p><math>k</math>, indice ou nombre entier;</p> <p><math>k_1, k_2</math>, coefficients;</p> <p><math>l</math>, largeur électrode rectangulaire;</p> <p><math>l_x</math>, <math>d \cdot \cos \theta</math>;</p> <p><math>L</math>, longueur électrode rectangulaire;</p> <p><math>n</math>, exposant;</p> <p><math>\tilde{q}_+^*</math>, <math>= \int_0^l \tilde{c}_+^* dz_+</math>;</p> <p><math>R</math>, rayon du cylindre;</p> <p><math>S</math>, (<math>u = sy</math>);</p> <p><math>\tilde{S}, \tilde{S}</math>, parties stationnaire et instationnaire de <math>S</math>;</p>	<p><math>t</math>, temps;</p> <p><math>t_+</math>, <math>= \omega t</math>;</p> <p><math>u, v</math>, composantes de la vitesse;</p> <p><math>x, y</math>, coordonnées;</p> <p><math>x_+</math>, <math>= \frac{x}{R}</math>, <math>y_+ = \frac{y}{\delta_{D_0}}</math>;</p> <p><math>x_{+0}</math>, valeur particulière de <math>x_+</math>;</p> <p><math>y_+^*</math>, <math>= \varepsilon_1^{1/2} y_+</math>;</p> <p><math>z_+</math>, (<math>x_+ = x_{+0} + z_+</math>);</p> <p><math>\alpha_k, \gamma_k</math>, fonction de <math>x_+</math>;</p> <p><math>\beta, \tilde{\beta}</math>, parties stationnaire et instationnaire de <math>\beta</math>;</p> <p><math>\delta_{D_0}</math>, <math>= \left(\frac{a}{R}\right)^{-1/3} Sc^{1/6} \left(\frac{D}{\omega}\right)^{1/2}</math>, épaisseur de la couche de diffusion stationnaire;</p> <p><math>\tilde{\delta}_{D_0}</math>, <math>= \left(\frac{D}{\omega}\right)^{1/2}</math>, épaisseur de la couche de diffusion instationnaire;</p> <p><math>\delta_{H_0}</math>, <math>= \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2}</math>, épaisseur de la couche limite hydrodynamique;</p> <p><math>\varepsilon</math>, coefficient;</p> <p><math>\varepsilon_1</math>, <math>= \left(\frac{a}{R}\right)^{2/3} Sc^{-1/3}</math>, paramètre;</p> <p><math>\nu</math>, viscosité cinématique;</p> <p><math>\nu(x_+), \nu(z_+)</math>, fonctions;</p> <p><math>\omega</math>, pulsation (<math>\omega = 2\pi F</math>);</p> <p><math>\theta</math>, coordonnée polaire;</p> <p><math>\Psi</math>, fonction de courant;</p> <p><math>\zeta</math>, variable;</p> <p><math>\eta</math>, variable affine;</p> <p><math>\varphi_k</math>, angle de déphasage <math>\left(\tan \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}\right)</math>;</p> <p><math>\Gamma(x)</math>, fonction gamma;</p>
---	--

- $Re = \frac{aR\omega}{\nu}$ , nombre de Reynolds;
- $Sc = \frac{\nu}{D}$ , nombre de Schmidt;
- $\overline{Sh}(x_+)$ , nombre de Sherwood local caractérisant le transfert stationnaire;
- $\overline{Sh}_m$ , nombre de Sherwood moyen caractérisant le transfert stationnaire;
- $\langle \overline{Sh}(x) \rangle$ , nombre de Sherwood local caractérisant le transfert de matière instationnaire pris en valeur efficace.

LORSQU'ON se reporte aux travaux qui ont été réalisés dans le cas des écoulements laminaires instationnaires de fluides newtoniens autour d'un cylindre de rayon  $R$ , nous constatons que deux cas seulement ont été abordés analytiquement, correspondant à des oscillations normales aux génératrices du cylindre, d'amplitudes faibles relativement au rayon  $R$ . C'est ainsi que nous pouvons citer les travaux de Holtmark [1] et Raney [2] pour des faibles nombres de Reynolds ( $Re \ll 1$ )

$$Re = \frac{aR\omega}{\nu} \tag{1}$$

$\omega$  étant la pulsation des oscillations et  $\nu$  la viscosité cinématique; et ceux de Schlichting [3] pour les grands nombres de Reynolds.

L'épaisseur de la couche limite période hydrodynamique  $\delta_H$  est de l'ordre de grandeur de:

$$\delta_{H_0} = \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/2} \tag{2}$$

Nous introduirons un système de coordonnées curvilignes  $x, y$ , tel que  $x$  représente l'abscisse curviligne comptée à partir du point  $A$  sur le cylindre (Fig. 1) et  $y$  l'ordonnée d'un point relativement à la surface du cylindre.

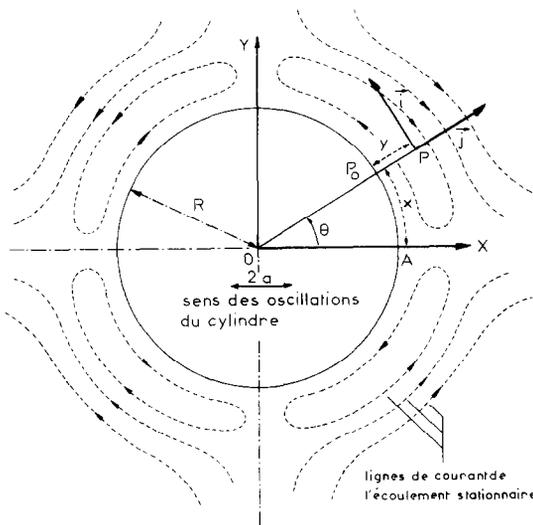


FIG. 1. Cylindre oscillant sinusoidalement normalement à sa generatrice dans un fluide au repos.

On peut montrer que quelque soit le régime hydrodynamique envisagé, la fonction de courant  $\Psi$  au voisinage immédiat de la surface du cylindre peut se mettre sous la forme générale:

$$\Psi = \frac{1}{2}y^2 \left[ \alpha_0(x_+) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \alpha_k(x_+) \cos kt - \gamma_k(x_+) \sin kt \} \right] \tag{3}$$

avec:

$$x_+ = \frac{x}{R} \quad \text{et} \quad t_+ = \omega t.$$

Dans le cas particulier de l'écoulement à grands nombres de Reynolds traité par Schlichting nous avons:

$$\begin{cases} \alpha_0(x_+) = \frac{a^2\omega^3}{R(2\nu)^{1/2}} \sin 2x_+ \\ \alpha_1(x_+) = -\gamma_1(x_+) = \frac{2a\omega^3}{(2\nu)^{1/2}} \sin x_+. \end{cases} \tag{4}$$

I. LES EQUATIONS DE TRANSFERT

Considérons un cylindre plongé dans un mélange fluide de deux constituants dont l'un présent en faible concentration  $C^*$  (moles/cm<sup>3</sup>) est consommé sur la surface active du cylindre au cours d'une réaction limitée par la diffusion du réactif. On suppose que la température et les propriétés physiques du fluide constantes. On assimile activité et concentration.

Pour calculer sur la surface du cylindre le flux de diffusion du réactif, nous devons résoudre l'équation:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right] \tag{5}$$

dans laquelle  $u$  et  $v$  respectivement les composantes tangentielles et normales de la vitesse relative du fluide par rapport à la surface,  $D$  le coefficient de diffusion du réactif.

Les conditions aux limites associées sont:

$$\text{pour } y = 0 \quad c = 0; \quad \text{pour } y \rightarrow \infty \quad c \rightarrow c^*. \tag{6}$$

1.1. Equations réduites

Afin de simplifier les calculs qui vont suivre, nous nous proposons d'utiliser une notation adimensionnelle affectant les grandeurs dans (5).

Nous définirons tout d'abord les ordres de grandeurs des différents termes considérés. Désignons par  $c^*$  la concentration de référence,  $\delta_{D_0}$  et  $R$  les longueurs de références correspondant respectivement aux coordonnées normales  $y$  et tangentielle  $x$ . En désignant par  $Sc = \nu/D$  le nombre de Schmidt on peut montrer [4] que l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $\delta_{D_0}$  de la couche de diffusion est égale à:

$$\delta_{D_0} = \left(\frac{a}{R}\right)^{-1/3} Sc^{1/6} \left(\frac{D}{\omega}\right)^{1/2} \tag{7}$$

L'estimation de cette épaisseur est obtenue par intégration relativement à  $y$  sur l'épaisseur de la couche de diffusion, de la partie stationnaire de l'équation (5) de convection massique, en tenant compte des ordres de grandeur des termes de vitesse.

Soit  $\omega^{-1}$  le temps de référence. Si l'on remarque que l'épaisseur  $\delta_{D_0}$  des couches de diffusion est généralement faible devant celle des couches hydrodynamiques  $\delta_{H_0}$  ( $Sc \text{ étant } \gg 1$ ), on peut utiliser sur le plan hydrodynamique une fonction de courant dont le développement relativement à  $y$  se limite au premier terme en  $y^2$ , c'est-à-dire la forme générale (3). Dans ces conditions :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = S_+ y = \left[ \alpha_0(x_+) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \alpha_k(x_+) \cos kt_+ + \gamma_k(x_+) \sin kt_+ \} \right] y \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \beta y^2 = -\frac{1}{2R} \left[ \frac{d\alpha_0}{dx_+} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{d\alpha_k}{dx_+} \cos kt_+ + \frac{d\gamma_k}{dx_+} \sin kt_+ \right\} \right] y^2. \end{cases} \quad (8)$$

En posant :

$$\begin{cases} x_+ = \frac{x}{R} & y_+ = \frac{y}{\delta_{D_0}} & c_+ = \frac{c}{c^*} & t_+ = \omega t \\ S_+ = \frac{S \delta_H}{a \omega} & \beta_+ = \frac{\beta R \delta_H}{a \omega}. \end{cases} \quad (9)$$

L'équation (5) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial c_+}{\partial t_+} + \varepsilon_1 \left( S_+ y_+ \frac{\partial c_+}{\partial x_+} + \beta_+ y_+^2 \frac{\partial c_+}{\partial y_+} \right) \\ = \varepsilon_1 \left[ \frac{\partial^2 c_+}{\partial y_+^2} + \left( \frac{\delta_{D_0}}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 c_+}{\partial x_+^2} \right] \\ \text{avec } \varepsilon_1 = \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} Sc^{-1/3}. \end{cases} \quad (10)$$

Si l'on tient compte du fait que  $Sc \sim 10^3$ , le paramètre  $\varepsilon_1$  est petit devant l'unité. De plus le rapport  $(\delta_{D_0}/R)^2$  est de l'ordre de  $10^{-4}$ , dans les conditions les plus défavorables.

Nous négligerons donc dans tous les calculs qui suivront le terme  $\partial^2 c_+ / \partial x_+^2$ .

Les conditions aux limites (6) deviennent :

pour  $y_+ = 0, c_+ = 0$ ; pour  $y_+ \rightarrow \infty, c_+ \rightarrow 1$ . (11)

1.2. Méthode de résolution

Les expressions générales adimensionnelles de  $S_+$  et  $\beta_+$  peuvent être décomposées en une partie stationnaire  $\bar{S}_+$  ou  $\bar{\beta}_+$  et une partie instationnaire  $\tilde{S}_+$  ou  $\tilde{\beta}_+$  :

$$S_+ = \bar{S}_+ + \tilde{S}_+ \quad \text{et} \quad \beta_+ = \bar{\beta}_+ + \tilde{\beta}_+$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{S}_+ = \alpha_0 + \\ \tilde{S}_+ = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \alpha_k \cos kt_+ + \gamma_k \sin kt_+ \} \\ \bar{\beta}_+ = -\frac{1}{2} \frac{d\alpha_0}{dx_+} \\ \tilde{\beta}_+ = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{d\alpha_k}{dx_+} \cos kt_+ + \frac{d\gamma_k}{dx_+} \sin kt_+ \right\}. \end{cases} \quad (12)$$

Nous devons à ce stade scinder la relation (10) en deux parties, l'une stationnaire, l'autre instationnaire, pour tenir compte de la décomposition de  $S_+$  et  $\beta_+$ . Nous obtenons ainsi :

$$\bar{S}_+ y_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} + \bar{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} + \tilde{S}_+ y_+ \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial x_+} + \tilde{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial y_+} = \frac{\partial^2 \bar{c}_+}{\partial y_+^2} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial t_+} = \varepsilon_1 \left[ \tilde{S}_+ y_+ \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial x_+} + \tilde{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial y_+} + \bar{S}_+ y_+ \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial x_+} \right. \\ \left. + \bar{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial y_+} + \tilde{S}_+ y_+ \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial x_+} + \tilde{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \tilde{c}_+}{\partial y_+} \right. \\ \left. - \bar{S}_+ y_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} - \bar{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} \right] = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \tilde{c}_+}{\partial y_+^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Pour caractériser la diffusion instationnaire les termes  $\partial \tilde{c}_+ / \partial t_+$  et  $\varepsilon_1 (\partial^2 \tilde{c}_+ / \partial y_+^2)$  doivent être de même ordre de grandeur. Ceci implique que la couche de diffusion instationnaire ait une épaisseur plus faible que celle de la couche stationnaire. Nous devons dans ces conditions introduire la nouvelle variable adimensionnelle :

$$\begin{cases} y_+^* = \frac{y}{\delta_{D_0}} = \varepsilon_1^{-1/2} y_+ \\ \text{avec } \tilde{\delta}_{D_0} = \varepsilon_1^{1/2} \delta_{D_0} = \left( \frac{D}{\omega} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (15)$$

D'autre part, ce phénomène de diffusion instationnaire ne pouvant être engendré que par la convection, nous devons admettre que dans la relation (14) des termes tels que  $\varepsilon_1 \tilde{S}_+ y_+ (\partial \tilde{c}_+ / \partial x_+)$  doivent être du même ordre de grandeur que  $\partial \tilde{c}_+ / \partial t_+$ . Il s'en suit que l'ordre de grandeur des fluctuations de concentration  $\tilde{c}^*$  doit être beaucoup plus faible que celui choisi pour les concentrations moyennes  $c^*$ . Nous devons dans ces conditions introduire la fonction adimensionnelle  $\tilde{c}_+^*$  :

$$\begin{cases} \tilde{c}_+^* = \frac{\tilde{c}}{c^*} = \varepsilon_1^{-2} \tilde{c}_+ \\ \text{avec } \tilde{c}^* = \varepsilon_1^2 c^* = \left( \frac{a}{R} \right)^{4/3} Sc^{-2/3} c^*. \end{cases} \quad (16)$$

Finalement, en se limitant aux termes fondamentaux dans les relations (13) et (14), nous sommes ramenés à résoudre le système :

$$\bar{S}_+ y_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} + \bar{\beta}_+ y_+^2 \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} = \frac{\partial^2 \bar{c}_+}{\partial y_+^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_+^*}{\partial t_+} + y_+^{*2} \left( \tilde{S}_+ \frac{\partial \tilde{c}_+^*}{\partial x_+} + \tilde{\beta}_+ \frac{\partial \tilde{c}_+^*}{\partial y_+} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{c}_+^*}{\partial y_+^{*2}} \quad (18)$$

les conditions aux limites associées à (17) étant :

$$\begin{cases} \text{pour } y_+ = 0 & \bar{c}_+ = \tilde{c}_+^* = 0 \\ \text{pour } y_+ \rightarrow \infty & \bar{c}_+ \rightarrow 1, \quad \tilde{c}_+^* \rightarrow 0. \end{cases} \quad (19)$$

**2. TRANSFERT DE MASSE SUR UN CYLINDRE ACTIF**  $\eta$  étant une variable affine définie comme suit :

Nous recherchons une solution générale pour le système d'équations (17) et (18), résolution que nous décomposerons en deux parties :

$$\eta = \frac{\bar{S}_+^{1/2} y_+}{3^{2/3} \left[ \int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz \right]^{1/3}} \tag{21}$$

**2.1. Résolution du problème stationnaire**

La solution de l'équation (17) associée aux conditions limites (19) est :

$$\begin{cases} \bar{c}_+ = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^\eta \exp(-z^3) dz, & \frac{d\bar{c}_+}{d\eta} = \frac{\exp(-\eta^3)}{\Gamma(4/3)} \end{cases} \text{ ct} \tag{20}$$

avec  $\Gamma(4/3) = 0.8929$

Dans cette conditions nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} = \frac{\bar{S}_+^{1/2} \exp(-\eta^3)}{3^{2/3} \Gamma(4/3) \left[ \int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz \right]^{1/3}} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} = -\frac{\eta \exp(-\eta^3)}{\Gamma(4/3)} \left[ \frac{\bar{\beta}_+}{\bar{S}_+} + \frac{1}{3} \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{\int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz} \right] \tag{23}$$

**2.2. Résolution du problème instationnaire**

En tenant compte des relations (22) et (23), l'équation (18) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{c}_+^*}{\partial t_+} - \frac{\partial^2 \bar{c}_+^*}{\partial y_+^2} = y_+^{*2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kt_+ - \varphi_k) \right] \exp[-\varepsilon_1^{3/2} v(x_+) y_+^{*3}] \tag{24}$$

avec :

$$A_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \text{ et } tg \varphi_k = \frac{b_k}{a_k} \tag{25}$$

$$\begin{cases} a_k = \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{3^{2/3} \Gamma(4/3) \left[ \int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz \right]^{1/3}} \left[ \left( \frac{\bar{\beta}_+}{\bar{S}_+} + \frac{1}{3} \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{\int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz} \right) \alpha_k + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_k}{dx_+} \right] \\ b_k = \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{3^{2/3} \Gamma(4/3) \left[ \int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz \right]^{1/3}} \left[ \left( \frac{\bar{\beta}_+}{\bar{S}_+} + \frac{1}{3} \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{\int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz} \right) \gamma_k + \frac{1}{2} \frac{d\gamma_k}{dx_+} \right] \end{cases} \tag{26}$$

Nous chercherons une solution pour  $\bar{c}_+^*$  de la forme :

$$\bar{c}_+^*(x_+, y_+^*, t_+) = \exp[-\varepsilon_1^{3/2} v(x_+) y_+^{*3}] \sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k(y_+^*, x_+) \exp[j(kt_+ - \varphi_k)] \tag{27}$$

dans laquelle :

$$v(x_+) = \frac{\bar{S}_+^{3/2}(x_+)}{9 \int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz}$$

En utilisant le fait que  $\varepsilon_1 \ll 1$ , nous obtenons :

$$\bar{c}_+^*(x_+, y_+^*, t_+) = \exp[-\varepsilon_1^{3/2} v(x_+) y_+^{*3}] \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ \frac{2}{k^2} \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{k}{2} \right)^{1/2} (1+j) y_+^* \right] - 1 \right\} - j y_+^{*2} \right] \exp[j(kt_+ - \varphi_k)] \tag{28}$$

et en revenant à la partie réelle de  $c_+$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{c}_+^* = & \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ \frac{2}{k^2} \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{k}{2} \right)^{1/2} y_+^* \right] \cos \left( \frac{k}{2} \right)^{1/2} y_+^* - 1 \right\} \cos(kt_+ - \varphi_k) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left\{ 2 \frac{\exp[-(k/2)^{1/2} y_+^*]}{k} \sin \left( \frac{k}{2} \right)^{1/2} y_+^* + y_+^{*2} \right\} \sin(kt_+ - \varphi_k) \right] \exp[-\varepsilon_1^{3/2} v(x_+) y_+^{*3}] \end{aligned} \tag{29}$$

On en déduit le gradient normal de concentration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}_+^*}{\partial y_+^*} = & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \bar{S}_+^{1/2}}{3^{2/3} \Gamma(4/3) \left[ \int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz \right]^{1/3}} \\ & \times \left[ \left\{ \left( \frac{\bar{\beta}_+}{\bar{S}_+} + \frac{1}{3} \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{\int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz} \right) \alpha_k + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_k}{dx_+} \right\} \frac{\exp[-(k/2)^{1/2} y_+^*]}{k^{3/2}} \cos \left( kt_+ - \left( \frac{k}{2} \right)^{1/2} y_+^* + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{y_+^*}{k} \sin kt_+ \right\} \\ & + \left\{ \left( \frac{\bar{\beta}_+}{\bar{S}_+} + \frac{1}{3} \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{\int_0^x \bar{S}_+^{1/2} dz} \right) \gamma_k + \frac{1}{2} \frac{d\gamma_k}{dx_+} \right\} \frac{\exp[-(k/2)^{1/2} y_+^*]}{k^{3/2}} \sin \left( kt_+ - \left( \frac{k}{2} \right)^{1/2} y_+^* + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{y_+^*}{k} \cos kt_+ \right\} \\ & \times \exp[-\varepsilon_1^{3/2} v(x_+)] \end{aligned} \tag{30}$$

2.3. Le transfert de masse sur un cylindre

2.3.1. *Partie stationnaire.* Désignons par  $j$  le flux stationnaire local de matière à la surface du cylindre. Nous obtenons d'après (22):

$$j = D \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right)_{y=0} = c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/3} \frac{\bar{S}_+^{1/2}}{3^{2/3} \Gamma(4/3) \left[ \int_0^{x_+} \bar{S}_+^{1/2} dz \right]^{1/3}} \tag{31}$$

En se plaçant dans le cas de l'écoulement laminaire instationnaire à grand nombre de Reynolds de Schlichting, nous avons pour  $0 < 2x_+ < \pi/2$ , compte-tenu de (4):

$$j = 0,7613 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{\left[ B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} \tag{32}$$

Dans cette relation (32), la fonction  $B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)$  est la fonction bêta incomplète, dont la définition générale est:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{x_+}(a, b) = 2 \int_0^{x_+} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta \\ \text{et} \\ B(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta. \end{array} \right. \tag{33}$$

Le nombre de Sherwood local  $\bar{Sh}$  aura pour expression:

$$\bar{Sh}(x_+) = \frac{jR}{c^* D} = 0,7613 Re^{1/2} Sc^{1/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/6} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{\left[ B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} \tag{34}$$

On peut également définir le flux moyen  $\bar{J}$  sur une partie d'un cylindre de longueur  $L$ , la partie active correspondant à  $0 < 2x_+ < \pi/2$  par exemple.

$$\bar{J} = 0,3806 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} LR \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin \theta|^{1/2}}{\left[ B_{\theta} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} d\theta \tag{35}$$

et un nombre de Sherwood moyen:

$$\bar{Sh}_m = \frac{4\bar{J}}{\pi c^* DL} = 0,4846 Re^{1/2} Sc^{1/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/6} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin \theta|^{1/2}}{\left[ B_{\theta} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} d\theta \tag{36}$$

2.3.2. *Partie instationnaire.* Désignons par  $\bar{j}$  le flux local instationnaire de matière à la surface du cylindre. Nous obtenons à partir de (30):

$$\bar{J} = c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-2/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{4/3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_k}{k^{3/2}} \sin \left\{ kt_+ - \varphi_k - \frac{\pi}{4} \right\} \tag{37}$$

En se plaçant dans le cas de l'écoulement laminaire instationnaire à grand nombre de Reynolds de Schlichting, (37) étant limité au premier terme:

$$j = -3,0457 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-2/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{5/3} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{\left[ B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} \times \left[ \left( \frac{4}{3} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)} - \cot 2x_+ \right) \sin x_+ + \frac{1}{2} \cos x_+ \right] \sin t_+ \tag{38}$$

Désignons par  $\langle \bar{j} \rangle$  la valeur efficace de ce flux. On obtient:

$$\langle \bar{j} \rangle = 1,0768 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-2/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{5/3} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{\left[ B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} \times \left[ \left( \frac{8}{3} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)} - 2 \cot 2x_+ \right) \sin x_+ + \cos x_+ \right] \tag{39}$$

Le nombre de Sherwood local aura pour expression:

$$\langle \bar{Sh}(x_+) \rangle = 1,0768 Re^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{7/6} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{\left[ B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3}} \left[ \left( \frac{8}{3} \frac{|\sin 2x_+|^{1/2}}{B_{2x_+} \left( \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right)} - 2 \cot 2x_+ \right) \sin x_+ + \cos x_+ \right] \tag{40}$$

3. TRANSFERT DE MASSE SUR UNE MICRO-ELECTRODE PLACEE SUR UN CYLINDRE INERTE

3.1. Résolution des équations

La recherche d'une solution pour le système (17) et (18) est analogue en tout point à ce qui a été fait précédemment. Nous décomposerons ce travail en deux parties.

3.1.1. *Calcul de la solution stationnaire.* Nous devons envisager deux cas:

(a)  $S_+(x_+0) \neq 0$ .

La micro-électrode disposée sur le cylindre inerte étant de dimension très petite relativement à  $R$ , nous désignerons par  $x_{+0}$  l'origine du développement de la couche de diffusion et poserons :

$$x_+ = x_{+0} + z_+ \quad \text{avec} \quad z_+ \ll x_{+0}. \quad (41)$$

La variable affine  $\eta$  définie par (21) s'écrit alors :

$$\eta = \frac{\bar{S}_+^{1/3}(x_{+0})y_+}{3^{2/3}z_+^{1/3}}. \quad (42)$$

La distribution de concentration au voisinage de la micro-électrode sera toujours donnée par (20). Le gradient normal de concentration s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} = \frac{\bar{S}_+^{1/3}(x_{+0}) \exp(-\eta^3)}{3^{2/3}\Gamma(4/3)z_+^{1/3}}. \quad (43)$$

(b)  $\bar{S}_+(x_{+0}) = 0$ .

Nous supposons que  $\bar{S}_+(x_+)$  est de la forme :

$$\bar{S}_+(x_+) = 2bz_+ + z_+ O(z_+). \quad (44)$$

En se limitant au premier ordre, la variable prend la forme :

$$\eta = \frac{b^{1/3}y_+}{3^{1/3}}. \quad (45)$$

La distribution de concentration reste toujours définie par (20) et le gradient normal de concentration est :

$$\frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} = \frac{b^{1/3} \exp(-\eta^3)}{3^{1/3}\Gamma(4/3)}. \quad (46)$$

3.1.2. *Calcul de la solution stationnaire.* Comme précédemment, nous devons envisager deux cas :

(a)  $S_+(x_{+0}) \neq 0$ .

Nous devons résoudre l'équation (18) associée aux conditions limites (19). En tenant compte des expressions (20) et (42), nous obtenons une équation aux dérivées partielles identique à (24) dans laquelle :

$$a_k = \frac{\bar{S}_+^{1/3}(x_{+0})}{3^{2/3}\Gamma(4/3)} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\alpha_k(x_{+0})}{z_+^{4/3}} + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_k(x_{+0})}{z_+^{1/3}} \right\} \quad (47)$$

$$b_k = \frac{\bar{S}_+^{1/3}(x_{+0})}{3^{2/3}\Gamma(4/3)} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\gamma_k(x_{+0})}{z_+^{4/3}} + \frac{1}{2} \frac{d\gamma_k(x_{+0})}{z_+^{1/3}} \right\}.$$

La solution de cette équation aux dérivées partielles est donnée par (29) et le gradient normal de concentration est égal à :

$$\frac{\partial \bar{c}_+^*}{\partial y_+^*} = -2 \exp[-\bar{c}_+^{3/2}v(z_+)y_+^{*3}] \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \left\{ \frac{\exp[-(k/2)^{1/2}y_+^*]}{k^{3/2}} \cos\left(kt_+ - \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}y_+^* + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{y_+^*}{k} \sin kt_+ \right\} \right. \\ \left. + b_k \left\{ \frac{\exp[-(k/2)^{1/2}y_+^*]}{k^{3/2}} \sin\left(kt_+ - \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}y_+^* + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{y_+^*}{k} \cos kt_+ \right\} \right]. \quad (48)$$

Pour calculer le flux de diffusion sur toute la surface de la micro-électrode, nous devons calculer la quantité :

$$\left[ \frac{\partial \bar{q}_+^*}{\partial y_+^*} \right]_{y_+^* \rightarrow 0} = \left[ \int_0^{l_+} \frac{\partial \bar{c}_+^*}{\partial y_+^*} dz_+ \right]_{y_+^* \rightarrow 0}. \quad (49)$$

Cette intégration se ramène au calcul de deux intégrales, soit :

$$I_1(y_+) = \int_0^{l_+} \frac{\exp[-(\bar{S}_+ y_+^3/9z_+)]}{z_+^{4/3}} dz_+ \\ = -3l_+^{1/3} \exp\{-[\bar{S}_+(x_{+0})y_+^3/9l_+]\} + \frac{1}{3}\bar{S}_+(x_{+0})y_+^3 \int_0^{l_+} \frac{\exp[-(\bar{S}_+ y_+^3/9z_+)]}{z_+^{7/3}} dz_+ \\ I_2(y_+) = \int_0^{l_+} \frac{\exp[-(\bar{S}_+ y_+^3/9z_+)]}{z_+^{1/3}} dz_+ = \frac{3}{2}l_+^{2/3} \exp\{-[\bar{S}_+(x_{+0})y_+^3/9l_+]\} + \frac{1}{2}\bar{S}_+(x_{+0})y_+^3 I_1(y_+).$$

Lorsque  $y_+ \rightarrow 0$ , nous avons :

$$I_1(y_+ \rightarrow 0) = -3l_+^{1/3} \quad I_2(y_+ \rightarrow 0) = \frac{3}{2}l_+^{2/3}. \quad (50)$$

Dans ces conditions, le flux réduit instationnaire sur toute la surface de la micro-électrode est égal à :

$$\left[ \frac{\partial \bar{q}_+^*}{\partial y_+^*} \right]_{y_+^* \rightarrow 0} = -2 \frac{\bar{S}_+^{1/3}(x_+0)}{3^{2/3} \Gamma(4/3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \left[ \left\{ \frac{3}{4} \frac{d\alpha_{k+}}{dx_+}(x_+0) l_+^{2/3} - \frac{\alpha_{k+}(x_+0)}{l_+^{1/3}} \right\} \cos \left( kt_+ + \frac{\pi}{4} \right) + \left\{ \frac{3}{4} \frac{d\gamma_{k+}}{dx_+}(x_+0) l_+^{2/3} - \frac{\gamma_{k+}(x_+0)}{l_+^{1/3}} \right\} \sin \left( kt_+ + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (51)$$

(b)  $\bar{S}_+(x_+0) = 0$ .

Nous avons dans ce cas cherché à améliorer la précision en utilisant un développement de  $\bar{S}_+(x_+)$  plus grand, soit :

$$\bar{S}_+(x_+) = 2bz_+(1 + \varepsilon z_+^n). \quad (52)$$

Notons que dans le cas d'un écoulement à grand nombre de Reynolds :

$$b = \frac{2}{2^{1/2}R} \quad \varepsilon = -\frac{2}{3} \quad n = 2. \quad (53)$$

L'équation (18) se présente encore sous la forme (24) avec :

$$\begin{cases} a_k = \left[ \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{k+}}{dx_+}(x_+0) - \varepsilon \frac{n(n+1)}{2n+3} \alpha_{k+}(x_+0) z_+^{n-1} \right] \\ b_k = \left[ \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{k+}}{dx_+}(x_+0) - \varepsilon \frac{n(n+1)}{2n+3} \gamma_{k+}(x_+0) z_+^{n-1} \right] \end{cases} \quad (54)$$

Un calcul analogue à tous ceux qui ont été fait précédemment donne :

$$\left[ \frac{\partial \bar{q}_+^*}{\partial y_+^*} \right]_{y_+^* \rightarrow 0} = -\frac{2b^{1/3}l_+}{3^{1/3} \Gamma(4/3)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{k+}}{dx_+}(x_+0) - \varepsilon \frac{n+1}{2n+3} \alpha_{k+}(x_+0) l_+^{n-1} \right\} \cos \left( kt_+ + \frac{\pi}{4} \right) + \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{k+}}{dx_+}(x_+0) - \varepsilon \frac{n+1}{2n+3} \gamma_{k+}(x_+0) l_+^{n-1} \right\} \sin \left( kt_+ + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (55)$$

Dans le cas particulier où  $(d\alpha_{k+}/dx_+)(x_+0) = 0$  et  $(d\gamma_{k+}/dx_+)(x_+0) = 0$ , nous devons remplacer ces deux termes dans (55) par  $a_k^* l_+$  et  $b_k^* l_+$  sachant que l'on peut écrire :

$$\frac{d\alpha_{k+}}{dx_+}(x_+) = 2a_k^* z_+ \quad \text{et} \quad \frac{d\gamma_{k+}}{dx_+}(x_+) = 2b_k^* z_+. \quad (56)$$

### 3.2. Transfert de masse sur une micro-électrode rectangulaire

On se propose d'évaluer le transfert de masse sur une électrode rectangulaire de longueur 1 suivant  $x$  et de largeur  $L$  suivant la génératrice du cylindre.

#### 3.2.1. Calcul du flux stationnaire.

(a)  $\bar{S}_+(x_+0) \neq 0$ .

Le flux local sur l'électrode compte-tenu de (43) est :

$$j = D \left( \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right)_{y=0} = c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/3} \frac{\bar{S}_+^{1/3}(x_+0)}{3^{2/3} \Gamma(4/3) z_+^{1/3}} \quad (57)$$

et le flux total sur l'électrode a pour valeur :

$$\bar{J} = L \int_0^1 j dz = \frac{3^{1/3}}{2\Gamma(4/3)} c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/3} \left( \frac{l}{R} \right)^{2/3} LR \bar{S}_+^{1/3}(x_+0). \quad (58)$$

Si nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement laminaire instationnaire à grand nombre de Reynolds, nous avons :

$$\bar{J} = 0,7195 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} \left( \frac{l}{R} \right)^{2/3} |\sin 2x_+0|^{1/3}. \quad (59)$$

Le nombre de Sherwood correspondant a pour expression :

$$\bar{Sh}(x_+0) = \frac{\bar{J}}{c^* DL} = 0,1795 Re^{1/2} Sc^{1/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/6} \left( \frac{l}{R} \right)^{2/3} |\sin 2x_+0|^{1/3}. \quad (60)$$

(b)  $\bar{S}_+(x_{+0}) = 0$ .

Le flux local sur l'électrode compte-tenu de (46) est:

$$J = D \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{c^* b^{1/3} D^{1/2} \omega^{1/2}}{3^{1/3} \Gamma(4/3)} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/3} Sc^{-1/6} \quad (61)$$

et le flux total sur l'électrode est égal à:

$$\bar{J} = \frac{c^* b^{1/3} D^{1/2} \omega^{1/2}}{3^{1/3} \Gamma(4/3)} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/3} \left( \frac{l}{R} \right) Sc^{-1/6} LR. \quad (62)$$

Pour un écoulement à grand nombre de Reynolds

$$\bar{J} = 0.6918 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} \left( \frac{l}{R} \right) LR \quad (63)$$

et

$$\bar{Sh}(x_{+0}) = 0.6918 Re^{1/2} Sc^{1/3} \left( \frac{a}{R} \right)^{1/6} \left( \frac{l}{R} \right). \quad (64)$$

3.2.2. *Calcul du flux instationnaire.* D'une façon générale, le flux total instationnaire est égal à:

$$\bar{J} = 2RLc^* D^{1/2} \omega^{1/2} \left( \frac{a}{R} \right)^{4/3} Sc^{-2/3} \sum_{k=1}^l \frac{A_k}{k^{3/2}} \sin \left( kt_+ - \varphi_k - \frac{\pi}{4} \right). \quad (65)$$

On se place dans le cas d'un écoulement laminaire instationnaire à grand nombre de Reynolds.

(a)  $\bar{S}_+(x_{+0}) \neq 0$ .

La valeur efficace de ce flux est:

$$\langle \bar{J} \rangle = 1.3566 RLc^* D^{1/2} \omega^{1/2} \left( \frac{a}{R} \right)^{5/3} Sc^{-2/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3} \left| \frac{3}{4} \left( \frac{l}{R} \right)^{2/3} \cos x_{+0} - \left( \frac{l}{R} \right)^{-1/3} \sin x_{+0} \right|. \quad (66)$$

Le nombre de Sherwood correspondant est:

$$\langle \bar{Sh}(x_{+0}) \rangle = 1.3566 Re^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{7/6} |\sin 2x_{+0}|^{1/3} \left| \frac{3}{4} \left( \frac{l}{R} \right)^{2/3} \cos x_{+0} - \left( \frac{l}{R} \right)^{-1/3} \sin x_{+0} \right|. \quad (67)$$

Il est intéressant de donner le rapport des nombres de Sherwood instationnaires et stationnaires:

$$\frac{\langle \bar{Sh}(x_{+0}) \rangle}{\bar{Sh}(x_{+0})} = 1.8854 Sc^{-1/2} \left( \frac{a}{R} \right) \left| \frac{3}{4} \left( \frac{l}{R} \right)^{2/3} \cos x_{+0} - \left( \frac{l}{R} \right)^{-1/3} \sin x_{+0} \right|. \quad (68)$$

(b)  $\bar{S}_+(x_{+0}) = 0$ .

La valeur efficace du flux total sur l'électrode est égale à:

$$\langle \bar{J} \rangle = 1.9567 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} \left( \frac{a}{R} \right)^{5/3} Sc^{-2/3} RL \left| \frac{1}{2} \left( \frac{l}{R} \right) \cos x_{+0} + \frac{2}{7} \left( \frac{l}{R} \right)^2 \sin x_{+0} \right|. \quad (69)$$

Notons que lorsque  $x_{+0} = \pi/2$  nous devons remplacer le terme  $\frac{1}{2}(l/R) \cos x_{+0}$  dans (69) par  $\frac{1}{4}(l/R)^2$ .

Le nombre de Sherwood est égal à:

$$\langle \bar{Sh}(x_{+0}) \rangle = 1.9567 Re^{1/2} Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{7/6} \left| \frac{1}{2} \left( \frac{l}{R} \right) \cos x_{+0} + \frac{2}{7} \left( \frac{l}{R} \right)^2 \sin x_{+0} \right| \quad (70)$$

et le rapport des nombres de Sherwood instationnaire et stationnaire est:

$$\frac{\langle \bar{Sh}(x_{+0}) \rangle}{\bar{Sh}(x_{+0})} = 2.8284 Sc^{-1/2} \left( \frac{a}{R} \right) \left| \frac{1}{2} \cos x_{+0} + \frac{2}{7} \left( \frac{l}{R} \right) \sin x_{+0} \right|. \quad (71)$$

### 3.3. Transfert de masse sur une micro-électrode circulaire

On se propose d'évaluer le transfert de masse sur une micro-électrode de section circulaire dont le diamètre est  $d$ .

#### 3.3.1. Calcul du flux stationnaire.

(a)  $\bar{S}_+(x_{+0}) \neq 0$ .

Pour aborder le problème du transfert de masse sur une électrode de section circulaire, nous décomposerons l'électrode circulaire en électrode rectangulaire de longueur  $l_x$  et de largeur  $L = d\xi$  infiniment petite (Fig. 2). Cette méthode de calcul a déjà été utilisée par Dumargue *et al.* [5]. La vérification expérimentale qui en a été faite a confirmé avec beaucoup de précision la validité de ce procédé.

Le flux élémentaire correspondant à cette électrode rectangulaire est:

$$d\bar{J} = 0.7195 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} R Sc^{-1/6} \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3} \left( \frac{l_x}{R} \right)^{2/3} d\xi.$$

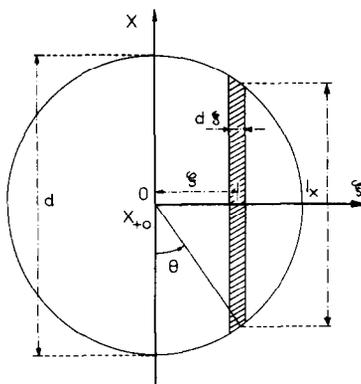


FIG. 2. Décomposition d'une électrode de section circulaire en bandes rectangulaires de largeur infinitésimale.

Introduisons l'angle  $\theta$  qui nous servira de paramètre d'intégration. Nous avons :

$$l_x = d \cos \theta \quad d\xi = \frac{1}{2} d \cos \theta d\theta.$$

Le flux total sur l'électrode est égal à :

$$\bar{J} = 0,6053 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} R^2 Sc^{-1/6} \left(\frac{a}{R}\right)^{2/3} \left(\frac{d}{R}\right)^{5/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3}. \tag{72}$$

Le nombre de Sherwood correspondant a pour expression :

$$\bar{Sh}(x_{+0}) = \frac{4\bar{J}}{\pi c^* D d} = 0,7707 Re^{1/2} Sc^{1/3} \left(\frac{a}{R}\right)^{1/6} \left(\frac{d}{R}\right)^{2/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3}. \tag{73}$$

(b)  $\bar{S}_+(x_{+0}) = 0$ .

En reprenant le raisonnement précédent, le flux total sur l'électrode est :

$$\bar{J} = 0,5433 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} R^2 Sc^{-1/6} \left(\frac{a}{R}\right)^{2/3} \left(\frac{d}{R}\right)^2. \tag{74}$$

Le nombre de Sherwood est égal à :

$$\bar{Sh}(x_{+0}) = 0,6918 Re^{1/2} Sc^{1/3} \left(\frac{a}{R}\right)^{1/6} \left(\frac{d}{R}\right). \tag{75}$$

### 3.3.2. Calcul du flux instationnaire.

(a)  $\bar{S}_+(x_{+0}) \neq 0$ .

Nous nous limiterons essentiellement aux valeurs efficaces du flux pour des nombres de Reynolds grands. D'après (66), on peut écrire :

$$\langle d\bar{J} \rangle = 1,3566 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} R \left(\frac{a}{R}\right)^{5/3} Sc^{-2/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3} \left[ \frac{3}{4} \left(\frac{l_x}{R}\right)^{2/3} \cos x_{+0} - \left(\frac{l_x}{R}\right)^{-1/3} \sin x_{+0} \right] d\xi. \tag{76}$$

Le flux total sur l'électrode est :

$$\langle \bar{J} \rangle = 1,5196 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} R^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{5/3} Sc^{-2/3} \left(\frac{d}{R}\right)^{2/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3} \left| 0,5633 \left(\frac{d}{R}\right) \cos x_{+0} - \sin x_{+0} \right|. \tag{77}$$

Le nombre de Sherwood correspondant est :

$$\langle \bar{Sh}(x_{+0}) \rangle = 1,9348 Re^{1/2} Sc^{-1/6} \left(\frac{a}{R}\right)^{7/6} \left(\frac{d}{R}\right)^{-1/3} |\sin 2x_{+0}|^{1/3} \left| 0,5633 \left(\frac{d}{R}\right) \cos x_{+0} - \sin x_{+0} \right|. \tag{78}$$

Le rapport des nombres de Sherwood instationnaire et stationnaire donne :

$$\frac{\langle \bar{Sh}(x_{+0}) \rangle}{\bar{Sh}(x_{+0})} = 2,5105 Sc^{-1/2} \left(\frac{a}{R}\right) \left(\frac{d}{R}\right)^{-1} \left| 0,5633 \left(\frac{d}{R}\right) \cos x_{+0} - \sin x_{+0} \right|. \tag{79}$$

(b)  $\bar{S}_+(x_{+0}) = 0$ .

Le flux total sur l'électrode est :

$$\langle \bar{J} \rangle = 0,7684 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} \left(\frac{a}{R}\right)^{5/3} Sc^{-2/3} R^2 \left| \left(\frac{d}{R}\right)^2 \cos x_{+0} + 0,9701 \left(\frac{d}{R}\right)^3 \sin x_{+0} \right|. \tag{80}$$

Dans le cas particulier où  $x_{+0} = \pi/2$  nous devons remplacer  $(d/R)^2 \cos x_{+0}$  par  $0,4244 (d/R)^3$ , ce qui donne:

$$\langle J \rangle = 1,0715 c^* D^{1/2} \omega^{1/2} \left(\frac{a}{R}\right)^{5/3} Sc^{-2/3} \left(\frac{d}{R}\right)^3 R^2. \tag{81}$$

Le nombre de Sherwood correspondant à (80) est:

$$\langle \tilde{Sh}(x_{+0}) \rangle = 0,9783 Re^{1/2} Sc^{-1/6} \left(\frac{a}{R}\right)^{7/6} \left| \left(\frac{d}{R}\right) \cos x_{+0} + 0,9701 \left(\frac{d}{R}\right)^2 \sin x_{+0} \right| \tag{82}$$

et celui correspondant à (81) est égal à:

$$\langle \tilde{Sh}(x_{+0}) \rangle = 1,3642 Re^{1/2} Sc^{-1/6} \left(\frac{a}{R}\right)^{7/6} \left(\frac{d}{R}\right)^2. \tag{83}$$

Le rapport des nombres de Sherwood instationnaire et stationnaire est pour la relation (82):

$$\frac{\langle \tilde{Sh}(x_{+0}) \rangle}{\tilde{Sh}(x_{+0})} = 1,4141 Sc^{-1/2} \left(\frac{a}{R}\right) \left| \cos x_{+0} + 0,9701 \left(\frac{d}{R}\right) \sin x_{+0} \right| \tag{84}$$

et pour la relation (83):

$$\frac{\langle \tilde{Sh}(x_{+0}) \rangle}{\tilde{Sh}(x_{+0})} = 1,9719 Sc^{-1/2} \left(\frac{a}{R}\right) \left(\frac{d}{R}\right). \tag{85}$$

4. RESULTATS EXPERIMENTAUX

L'étude expérimentale réalisée s'appuie sur la technique polarographique dont les applications en mécanique des fluides sont devenues très courantes. Il est intéressant de noter à ce sujet qu'une telle technique a été utilisée par LeBouche, Martin et Py, pour mesurer le transfert de masse sur un cylindre transversal dans un écoulement laminaire ou turbulent pulsé [6] et [7]. Bien que la méthode de mesure que nous avons choisi soit la même que ces auteurs, notre travail s'est surtout orienté vers le problème d'étalonnage des sondes pariétales pour un écoulement présentant un taux de pulsation quelconque.

4.1. Dispositif et conditions expérimentales

Le fluide utilisé est une solution aqueuse d'un corps oxydo-réducteur (ferricyanure) de concentration uniforme  $c^* = 2 \cdot 10^{-6}$  mole/cm. On provoque une réaction d'électrolyse, l'une des électrodes, de très petite dimension (fil de platine de diamètre 0,6 mm) étant insérée dans la paroi du cylindre et constituant l'élément de mesure. Elle est portée à un potentiel tel que la réaction électrochimique  $\gamma$  soit très rapide (la concentration du corps actif étant maintenue nulle sur la surface). La migration de ce corps actif est évitée par addition massive d'un électrolyte indifférent (NaOH, O, 1N) qui n'est ni oxydé ni réduit dans les conditions

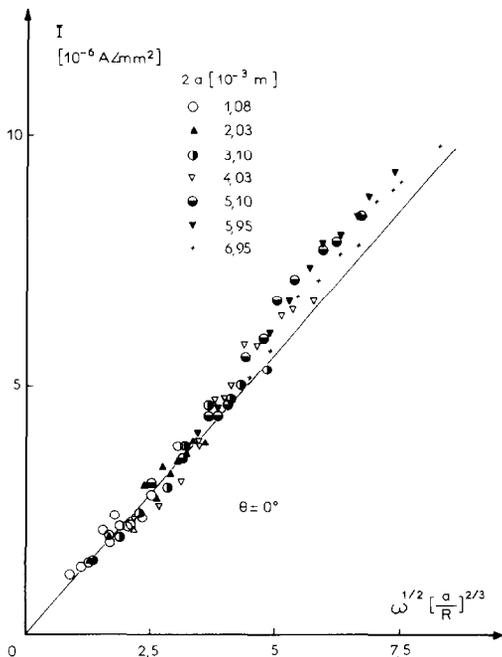


FIG. 3.

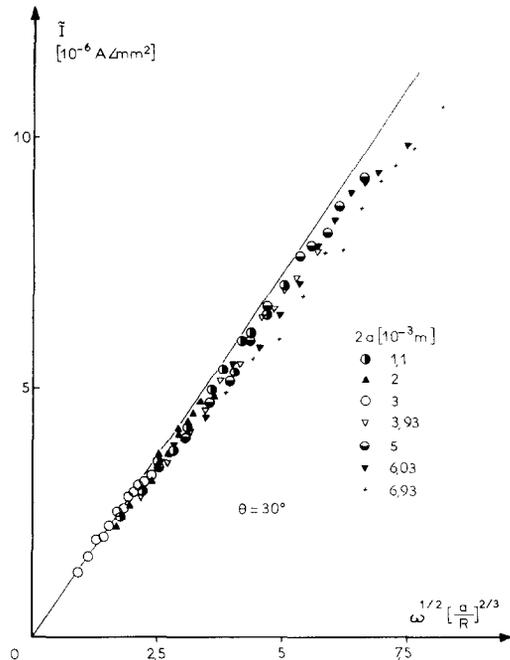


FIG. 4.

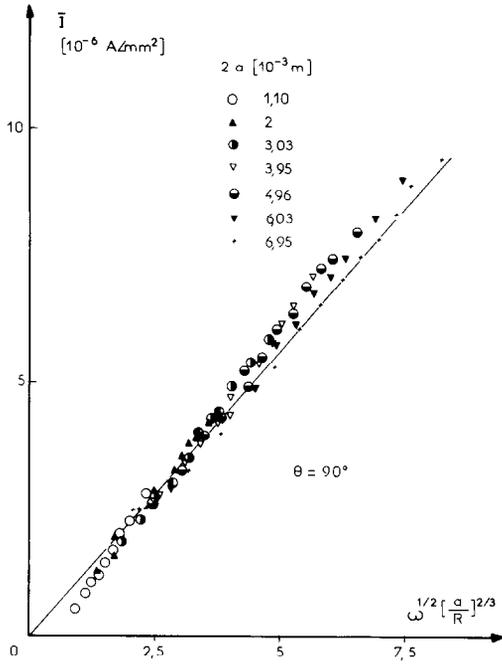


FIG. 5.

de potentiel imposées. Les courants électriques détectés sur cette petite électrode sont dû alors uniquement au couplage diffusion convection du corps actif. Ils permettent une mesure directe du transfert de matière local et instantané.

Pour créer les conditions d'écoulement instationnaire autour d'un cylindre oscillant dans un fluide au repos nous avons utilisé un cylindre en atuglass de 5mm de diamètre et 50mm de longueur positionné sur un support en V et pouvant tourner autour de son axe afin de faire varier l'angle  $\theta$  de l'électrode placée en Po avec la direction OX des oscillations (Fig. 1). Le support en V du cylindre est lié à un convertisseur: mouvement de rotation-mouvement rectiligne oscillant sinusoidalement muni d'un excentrique permettant des réglages d'amplitude de 0,5-3,5mm, la fréquence des oscillations variant de 0,5-7 Hz. Nous avons obtenu des nombres de Reynolds  $Re$  et des amplitudes réduites d'oscillation  $a/R$

$$8 < Re < 380; \quad 0,2 < \frac{a}{R} < 1,4.$$

La polarisation des électrodes est obtenue au moyen d'un potentiostat couplé à un enregistreur permettant

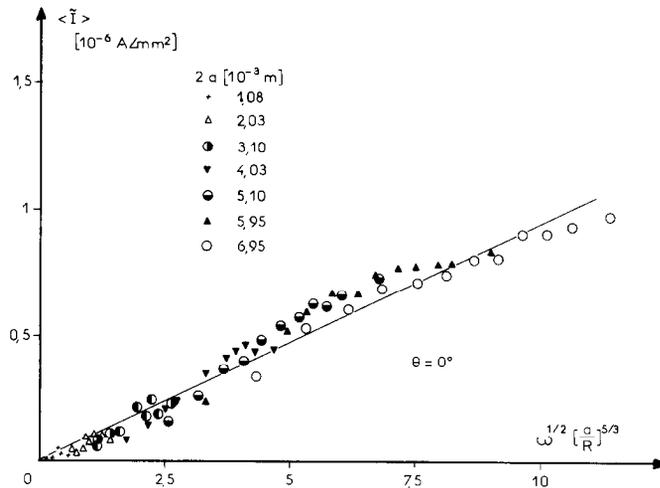


FIG. 6.

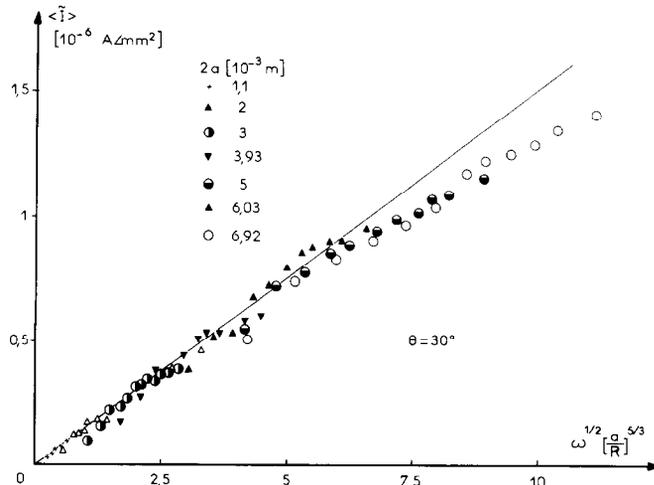


FIG. 7.

la détection des signaux électriques continus. La partie alternative des signaux électriques est amplifiée, filtrée et mesurée sur voltmètre RMS. Un blindage électromagnétique sérieux de toute l'installation est nécessaire pour réduire le rayonnement [4].

#### 4.2. Résultats expérimentaux

Dans l'étude expérimentale de Kalache [4] de nombreux résultats ont été présentés, notamment sur la dépendance des flux de matière en fonction de la pulsation et on peut constater que la loi

$$J = k\omega^{1/2}$$

est bien vérifiée tant pour la partie alternative que pour la partie continue du flux. Dans cet exposé, nous nous sommes limités volontairement aux vérifications expérimentales correspondant aux lois du flux stationnaire:

$$\bar{J} = k_1 \omega^{1/2} \left( \frac{a}{R} \right)^{2/3} \quad (86)$$

et à celles du flux instationnaire:

$$\langle \bar{J} \rangle = k_2 \omega^{1/2} \left( \frac{a}{R} \right)^{5/3} \quad (87)$$

Sur les Figs. 3-5, nous avons représenté la densité de courant continu détecté sur la micro-électrode en fonction du paramètre pour des angles  $\theta$  respectivement 0, 30 et 90°. Notons que:

$$i = 4 \frac{n \bar{\mathcal{F}} \bar{J}}{\pi d^2} \quad (88)$$

$\bar{\mathcal{F}}$  étant le nombre de Faraday.

Les résultats expérimentaux s'accordent assez bien avec la théorie représentée par un droite passant par l'origine. Les écarts sont dus au fait que dans certains conditions le nombre de Reynolds n'était pas assez grand devant l'unité lorsque  $a/R \ll 1$ , et inversement nous avons des rapports  $a/R \sim 1$  pour  $Re \gg 1$ .

Sur les Figs. 6 et 7, nous avons représenté la densité du courant alternatif:

$$\langle \bar{I} \rangle = 4 \frac{n \bar{\mathcal{F}} \langle \bar{J} \rangle}{\pi d^2} \quad (89)$$

en fonction du paramètre  $\omega^{1/2} (a/R)^{5/3}$  pour des angles  $\theta$  respectivement 0 et 30°. Là encore, nous constatons un assez bon accord entre les résultats expérimentaux et la droite théorique malgré une certaine dispersion des points de mesures pour des valeurs élevées du paramètre  $\omega^{1/2} (a/R)^{5/3}$  ce que nous avons déjà expliqué dans le cas du transfert continu.

Le travail qui vient d'être exposé a permis d'appliquer la technique polarographique sur micro-électrode, au cas des écoulements liquides instationnaires, ceci d'une façon beaucoup plus rigoureuse.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. Holtmark, J. Johnsen, T. Sikkeland et S. Skavlem, Boundary layer flow near a cylindrical obstacle, *J. Acoust. Soc. Am.* **26**(1), 26-39 (1954).
2. W. P. Raney, J. C. Corelli et P. J. Westervelt, Acoustical streaming in the vicinity of a cylinder, *J. Acoust. Soc. Am.* **26**(6), 1006-1014 (1954).
3. H. Schlichting, Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen, *Phys. Z.* **33**, 327-335 (1932).
4. D. Kalache, Etude du transfert de masse sur une micro-électrode placée sur un cylindre oscillant sinusoidalement dans un fluide newtonien au repos. Thèse de doctorat de 3ème cycle, Université de Poitiers (juillet 1975).
5. P. Dumargue, L. Mollet, M. Dagueneu et D. Bodiot, Calcul du flux limite de diffusion sur une micro-électrode de section circulaire. Equivalence avec une électrode de section rectangulaire. Vérification expérimentale dans le cas du disque tournant en régime laminaire, *J. Electrochem. Acta.* **19**, 841-844 (1974).
6. M. LeBouche, M. Martin et B. Py, Interprétation de l'échange thermique en écoulement pulsé incompressible par des mesures du gradient pariétal de vitesse, *Revue générale de Thermique*, No. 126, pp. 531-542 (juin 1972).
7. M. LeBouche et M. Martin, Transfert de masse sur le cylindre transversal. Effet des pulsations et de la turbulence de l'écoulement incident, Congrès Français de Mécanique, Poitiers (17-20 septembre 1973).

#### STUDY OF MASS TRANSFER ON A SINUSOIDALLY OSCILLATING CYLINDER IN A NEWTONIAN FLUID AT REST

**Abstract**—The objective of this theoretical research is to define the equations of mass transport on electrodes placed on a body which performs harmonic oscillation in a Newtonian fluid at rest. The body is a circular cylinder which performs oscillations perpendicular to its generatrices. The flow is laminar, the oscillations have a small amplitude compared to radius of cylinder, and the Reynolds number is large. The theoretical research includes two parts, the first concerns a cylinder with a part of surface which is active, the second concerns the transport on a micro-electrode placed on an inactive cylinder. Experimental results are presented in the case of a local mass transport on a micro-electrode.

#### UNTERSUCHUNG DES STOFFAUSTAUSCHES AN EINEM SINUSFÖRMIG VIBRIERENDEN ZYLINDER IN EINEM RUHENDEN, NEWTONSCHEN FLUID

**Zusammenfassung**—Das Ziel dieser theoretischen Untersuchung ist die Ermittlung der Gesetze für den Stoffaustausch an Elektroden, welche auf einem sinusförmig vibrierenden Körper angebracht sind, der sich in einem ruhenden, newtonschen Fluid befindet. Als Modellkörper wurde ein Kreiszyylinder gewählt, der quer zu seiner Achse vibriert. Die Strömung wird als laminar angenommen; die Schwingungsamplitude sei relativ gering im Vergleich zum Radius und die Reynoldszahl sei groß. Die Studie umfaßt 2 Teile: der erste behandelt einen teilweise aktiven Zylinder, der zweite den Austausch an einer Mikroelektrode auf einem inerten Zylinder. Versuchsergebnisse werden für den Fall angegeben, daß der gesamte Stoffaustausch an der Mikroelektrode erfolgt.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА МАССЫ У СИНУСОИДАЛЬНО  
ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА В НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ,  
НАХОДЯЩЕЙСЯ В СОСТОЯНИИ ПОКОЯ**

**Аннотация** — Целью данного теоретического исследования являлся вывод уравнений переноса массы у электродов, расположенных на теле, совершающем гармонические колебания в ньютоновской жидкости, находящейся в состоянии покоя. Тело представляет собой круглый цилиндр, совершающий колебания, перпендикулярные его образующим. Течение ламинарное, амплитуда небольшая по сравнению с радиусом цилиндра, а число Рейнольдса большое. Теоретическое исследование состоит из двух частей. В первой части рассматривается цилиндр с активной поверхностью, во второй — процессы переноса на микроэлектроде, находящемся на инертном цилиндре. Представлены результаты экспериментов для случая локального переноса массы на микроэлектроде.